Partie 4 : La simulation numérique

Chapitre 4

Interpolation polynomiale de Lagrange

1. Introduction : Interpoler une fonction

Si on a le problème suivant : on dispose d'un tableau de nombres issus d'un calcul, et on veut connaitre la fonction qui lie ces points. L'interpolation peut être une solution à ce problème.
Que veut dire interpolation ?
Supposons donc que les couples de mesures dont nous disposons (x_i, y_i) soient des points représentatifs de la courbe d'une fonction f que nous cherchons à déterminer. Nous allons interpoler cette fonction f, c'est-à-dire l'approcher par un polynôme, en s'arrangeant pour que la courbe représentative de ce polynôme passe par tous les points (x_i, y_i) de notre tableau.
Il existe de nombreuses méthodes d'interpolation polynomiale. Nous étudions les *polynômes de Lagrange*.

2. Principe de l'interpolation polynomiale de Lagrange :

Pour construire les points de la courbe approchée de f par l'interpolation polynomiale à partir de $n + 1$ points $M_i(x_i, y_i)$ $\forall$i, $0 \leq i \leq n$ (avec les x_i distincts deux à deux), il suffit de calculer à chaque fois la valeur d'un polynôme à un x donné $p(x)$.

Comment le faire ?

1) Il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à n qui aux abscisses x_i prend les valeurs y_i :

$$\forall \mathrm{i}, 0 \leq i \leq n, \qquad P(x_i) = y_i$$

- P : **polynôme d'interpolation** aux points x_i pour les mesures y_i ;
- x_i : nœuds ou **points d'interpolations** ;
- y_i : $y_i = f(x_i)$ représentent les **valeurs interpolées** ;

2) P au point x s'écrit sous la forme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(\mathrm{x}) \text{ , avec } l_i(\mathrm{x}) = \prod_{j=0\ ,j\neq i}^{n} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$$

Les l_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré *n* pour tout *i* :

$$l_i(\mathrm{X}) = \prod_{j=0\ ,j\neq i}^{n} \frac{X-x_j}{x_i-x_j} = \frac{X-x_0}{x_i-x_0} \dots \frac{X-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \frac{X-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \dots \frac{X-x_n}{x_i-x_n}$$

Ainsi le polynôme de Lagrange au point x se calcule par la formule générale suivante :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0 \ et\ j\neq i}^{n} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$$

Exemple :

Pour les points $(x_0 = 1, y_0 = 3), (x_1 = -1, y_1 = 2), (x_2 = 2, y_2 = -1)$, on calcule d'abord les polynômes de Lagrange :

$$l_0(X) = \frac{(X+1)(X-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}\,(X^2 - X - 2)$$

$$l_1(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}\,(X^2 - 3X + 2)$$

$$l_2(X) = \frac{(X-1)(X+1)}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}\,(X^2 - 1)$$

Puis on calcule la fonction polynomiale passant par ces points :

$$P(X) = 3l_0(X) + 2l_1(X) - l_2(X)$$

$$P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 4$$

3. Algorithme python de l'interpolation de Lagrange :

<u>Données de l'algorithme :</u>
- Le vecteur $X = (x_0, \ldots, x_n)$ formé des points d'interpolation ;
- Le vecteur $Y = (y_0, \ldots, y_n)$ formé des valeurs d'interpolations ;
- Le point réel *x* auquel le polynôme se calcule ;

<u>Résultat :</u> estimation au point x

Travail à faire :

1) Ecrire une fonction python **produit** qui retourne le produit des éléments d'une séquence ***S*** donnée.

2) Ecrire une fonction python **interpolation_Lagrange** qui permet d'implémenter la méthode de Lagrange et retourne une estimation du polynôme de lagrange au point ***x*** donné.

3) Lors d'une expérience, les mesures de la masse volumique de l'eau pure en fonction de la température, pour quelques températures données ont donné comme résultats :

Températures (° *C)*	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*
Masse volumique *(kg/m³)*	*999.87*	*999.99*	*999.73*	*999.13*	*998.23*

Stocker ces mesures dans deux tableaux : **Temperature** et **MasseVol**.

4) Calculer les estimations du polynôme de Lagrange pour ***x*** variant entre *0°* et *20°* avec un pas égal à *0.1* de deux méthodes différentes :

a. En utilisant la fonction implémentée.

b. En utilisant la fonction prédéfinie **lagrange(vectx, vecty)** du module *scipy.interpolate*

5) Tracer sur le même graphique avec grille:

a. La courbe des mesures en rouge avec label= 'mesures'.

b. La courbe des estimations de lagrange par la méthode implémentée en bleu avec label='lagrange_impl'.

c. La courbe des estimations de lagrange par la fonction prédéfinie en vert avec label 'lagrange_import'.